



Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

De verschillende aspecten van Riemanns ζ -functie
(Engelse titel: The different aspects of Riemann's
 ζ -function)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

Joris van Tatenhove

Delft, Nederland
Augustus 2014



BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“De verschillende aspecten van Riemanns ζ -functie”
(Engelse titel: “The different aspects of Riemann’s ζ -function”)

Joris van Tatenhove

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Prof. Dr. J.M.A.M. van Neerven

Overige commissieleden

Dr.ir. M. Keijzer

Prof.dr.ir. A.W. Heemink

Augustus, 2014

Delft

Hoofdstuk 1

Samenvatting

In dit verslag wordt de analytische uitbreiding van de ζ -functie besproken, samen met nog drie andere alternatieve schrijfwijzen. Er worden een aantal eigenschappen van de ζ -functie en haar nulpunten afgeleid, waaronder een formule van het aantal nulpunten $N(T)$ met imaginair deel tussen 0 en T . Daarna wordt numeriek aangetoond dat de pair correlation en de nearest neighbour distribution van ζ en Hermitische matrix hetzelfde is. Ook worden Bernoulli-getallen geïntroduceerd en worden twee formules die deze getallen en ζ aan elkaar koppelen afgeleid. Het geheel wordt afgesloten met de bespreking en implementatie van een algoritme dat de waarden van ζ uit kan rekenen.

Hoofdstuk 2

Introductie

In het jaar 2000 kwam het Clay Mathematics Institute of Cambridge in Massachusetts met een lijst van 7 grote, onopgeloste problemen in de wiskunde en natuurkunde. Degene die een van deze problemen oplost, wordt beloond met \$1,000,000. Van deze 7 problemen is er tot nu toe maar een opgelost. Een van de open problemen in deze lijst is de zogenoemde Riemann-hypothese. Deze hypothese stelt dat bepaalde nulpunten van een formule op een bepaalde lijn liggen. De wiskundige Bernhard Riemann formuleerde dit vermoeden in 1859 en sindsdien zijn vele wiskundigen en natuurkundigen met dit probleem bezig geweest. De formule komt in heel veel verschillende takken van wiskunde en fysica naar boven en heeft vooral heel veel te maken met de verdeling van priemgetallen. Er zijn talloze theorieën die kunnen worden bewezen als de Riemann-hypothese waar blijkt te zijn en equivalente uitspraken die in de verste verten niet op de Riemann-hypothese schijnen te lijken (zie [1]). Ook is er numeriek heel veel onderzoek naar gedaan en zijn er nog steeds geen tegenvoorbeelden gevonden in de vele miljarden nulpunten die zijn gevonden. Hoewel de algemene consensus is dat de Riemann-hypothese waar is en er al veel mensen zijn die beweren het vermoeden bewezen te hebben, is er nog geen algemeen geaccepteerd, sluitend bewijs voor de hypothese. In dit verslag wordt eerst behandeld wat de Riemann-zèta-functie precies is, daarna leiden we een paar manieren af waarop we deze functie anders kunnen schrijven of uit kunnen breiden naar bijna het gehele complexe vlak. Dit wordt gevolgd door een paar analytische eigenschappen van de zèta-functie, die voornamelijk betrekking hebben tot de nulpunten. Daarna leggen we een verband tussen deze nulpunten en de eigenwaarden van een specifiek soort matrices. Hierna introduceren we de Bernoulli-getallen en twee gelijkheden die deze koppelen aan waarden van de zèta-functie. Het geheel wordt afgesloten door het behandelen van twee versies van een algoritme, wat we daarna koppelen aan de Bernoulli-getallen. Het doel van dit verslag is een introductie te geven van de verschillende aspecten van ζ op het niveau van een wiskundebachelor.

Inhoudsopgave

1	Samenvatting	5
2	Introductie	7
3	De Riemann-zèta-functie	11
3.1	De Riemann-zèta-functie	11
3.2	Volledige uitbreiding	11
3.2.1	Gevolgen van de uitbreiding	14
3.2.2	Riemann-hypothese	14
3.3	Andere schrijfwijzen	14
3.3.1	Productformule van Euler	14
3.3.2	Alternerende sommatie	16
3.3.3	Uitbreiding voor $\Re s > 0$	16
4	Nulpunten	19
4.1	De lijn $\zeta(1 + it)$	19
4.2	De functie ξ en de kritieke strip	21
4.3	Het tellen van nulpunten	21
5	Random matrices	27
5.1	Hermitische matrices	27
5.2	ζ -functie en random matrices	29
5.2.1	Pair correlation	29
5.2.2	Nearest Neighbour Spacing	31
6	Bernoulli-getallen	33
6.1	Uitdrukking voor $\zeta(2k)$	35
6.2	Uitdrukking voor $\zeta(1 - k)$	37
7	Algoritme	41
7.1	Basis van het algoritme	41
7.2	Chebyshev-polygonomen	42
7.3	Wegvallende restterm	44
7.4	Bernoulli-getallen	44
8	Slot	47

A Matlab Code - Algoritmen	49
A.1 Algoritme 1	49
A.2 Algoritme 2	50
A.3 Bernoulli numbers	51
B Matlab Code - Random matrices	53
B.1 Matrix Creator	53
B.2 Pair Correlation GUE	54
B.3 Nearest Neighbour Distribution GUE	56
B.4 Pair Correlation ζ	57
B.5 Nearest Neighbour Distribution ζ	58

Hoofdstuk 3

De Riemann-zèta-functie

In dit hoofdstuk zal de ζ -functie worden geïntroduceerd, waarna er ook alternatieve schrijfwijzen en uitbreidingen worden gepresenteerd. Aan de hand van een van deze uitbreidingen kunnen we een aantal eigenschappen afleiden en de Riemann-hypothese formuleren.

3.1 De Riemann-zèta-functie

De Riemann-zèta-functie ζ wordt voor getallen $s = \sigma + it$ waar $\sigma > 1$ gedefinieerd door

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

De notatie $s = \sigma + it$ is de notatie die de rest van dit verslag wordt aangehouden.

De eis dat $\sigma > 1$ is omdat deze som anders niet convergeert.

Deze formule werd in de achttiende eeuw al door Euler bestudeerd, maar hij bekeek alleen reëelwaardige argumenten. Hij ontdekte de waarden van de ζ -functie op alle even natuurlijke getallen. Hiermee kwam hij onder andere op een oplossing voor het Bazel-probleem:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Riemann was de eerste die deze functie een analytische voortzetting wist te geven die, op $s = 1$ na, het hele complexe vak bevat. Een analytische functie $f^* : E \rightarrow \mathbb{C}$ wordt de analytische voortzetting of analytische uitbreiding van een analytische functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ genoemd als geldt dat D en E open en niet-leeg zijn, $D \subseteq E$ en $f^*(s) = f(s)$ voor alle $s \in D$. In dit geval houdt dat dus in dat de functie ζ^* die Riemann heeft gevonden analytisch is, voor elke $s \neq 1$ in \mathbb{C} een waarde aan ζ^* toe wordt gekend en dat als $\Re s > 1$, dan $\zeta^*(s) = \zeta(s)$. ζ^* is de functie die in de literatuur bedoeld wordt als de schrijver ζ gebruikt en dit zullen wij ook van hier af aan doen. In [1] staat beschreven hoe Riemann de analytische uitbreiding afleidde:

3.2 Volledige uitbreiding

Om de analytische uitbreiding te formuleren moeten we eerst een functie introduceren. Dit is Jacobi's theta-functie:

$$\vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$$

ϑ heeft een eigenschap die voor ons belangrijk is. Deze eigenschap is $\sqrt{x}\vartheta(x) = \vartheta(x^{-1})$. Om dit te bewijzen, maken we gebruik van de sommatieformule van Poisson. We zullen niet laten zien dat ϑ aan de voorwaarden voor het toepassen van deze formule voldoet. Deze sommatieformule luidt:

Stelling 1. *Laat f een analytische functie zo dat er een a bestaat zo dat $|\Im f(s)| < a$ voor alle $s \in \mathbb{C}$ en zo dat er een constante $b > 0$ bestaat zo dat $|f(\sigma + it)| \leq \frac{b}{1+\sigma^2}$ voor alle $\sigma \in \mathbb{R}$ en $|t| < c$ voor een bepaalde $c \in \mathbb{R}$. Dan geldt*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$$

Hierbij is \hat{f} de fouriertransformatie van f :

$$\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x n} dx$$

De formule $f(x) = e^{\pi x^2}$ voldoet aan deze twee voorwaarden. Laat $t > 0$ en $a \in \mathbb{R}$ vast en bekijk de transformatie $x \rightarrow \sqrt{t}(x + a)$. Dan geldt dat

$$f(x) = e^{-\pi t(x+a)^2}$$

en

$$\hat{f}(n) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}} e^{2\pi i a n}$$

Als we $a = 0$ bekijken en dit invullen in Poisson's sommatieformule vinden we

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}}$$

Oftewel

$$\sqrt{t}\vartheta(t) = \vartheta(t^{-1})$$

Nu kunnen we de analytische voortzetting van ζ formuleren:

Stelling 2. *De analytische voortzetting van ζ , gedefinieerd voor alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, is*

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left(x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2} \right) \left(\frac{\vartheta(x)-1}{2} \right) x^{s/2-1} dx \right)$$

Bewijs. We schrijven $s = \sigma + ti$. Als $\sigma > 0$, dan volgt uit de definitie van de Γ -functie dat

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s/2-1} dt$$

We voeren de volgende substitutie uit: $t = n^2 \pi x$. Dit resulteert in

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} n^{s-2} \pi^{s/2-1} x^{s/2-1} n^2 \pi dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} n^s \pi^{s/2} x^{s/2-1} dx \\ \pi^{-s/2} n^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} x^{s/2-1} dx \end{aligned}$$

Voor elke $n \in \mathbb{N}$ convergeert deze integraal vanwege de exponentiële afname van de eerste term. We kijken wat er gebeurt als we dit over alle n sommeren:

$$\pi^{-s/2} \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} x^{s/2-1} dx$$

Als geldt dat $\sigma > 1$ kunnen we sommatie en integratie omwisselen:

$$\pi^{-s/2} \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} \right) x^{s/2-1} dx \quad (3.1)$$

Hierin herkennen we voor een deel Jacobi's theta-functie. In (3.1) vinden we alleen de positieve termen van ϑ . Vanwege de term n^2 is de sommand bij $n = i$ hetzelfde als die bij $n = -i$ voor alle $i \in \mathbb{N}$ en we missen de term $n = 0$, dus we vinden:

$$\pi^{-s/2} \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\vartheta(x) - 1}{2} \right) x^{s/2-1} dx$$

Nu gebruiken we dat $\sqrt{x}\vartheta(x) = \vartheta(x^{-1})$. We kunnen het deel van de integraal aan de rechterkant waar x van 0 tot 1 omschrijven met behulp van de substitutie $x = u^{-1}$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{s/2-1} \left(\frac{\vartheta(x) - 1}{2} \right) dx &= \int_{x=0}^{x=1} (u^{-1})^{s/2-1} \left(\frac{\vartheta(u^{-1}) - 1}{2} \right) (-u^{-2}) du \\ &= \int_1^{\infty} u^{-s/2-1} \left(\frac{\sqrt{u}\vartheta(u) - 1}{2} \right) du \\ &= \int_1^{\infty} u^{-s/2-1/2} \left(\frac{\vartheta(u) - 1}{2} + \frac{1 - u^{-1/2}}{2} \right) du \\ &= \int_1^{\infty} u^{-s/2-1/2} \left(\frac{\vartheta(u) - 1}{2} \right) du \\ &+ \int_1^{\infty} \frac{1}{2} u^{-s/2-1/2} du - \int_1^{\infty} \frac{1}{2} u^{-s/2-1} du \\ &= \int_1^{\infty} u^{-s/2-1/2} \left(\frac{\vartheta(u) - 1}{2} \right) du + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \\ &= \int_1^{\infty} u^{-s/2-1/2} \left(\frac{\vartheta(u) - 1}{2} \right) du + \frac{1}{s(s-1)} \end{aligned}$$

Onze originele uitdrukking kunnen we nu dus schrijven als

$$\pi^{-s/2} \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left(x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2} \right) \left(\frac{\vartheta(x) - 1}{2} \right) x^{s/2-1} dx \quad (3.2)$$

Oftewel

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left(x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2} \right) \left(\frac{\vartheta(x) - 1}{2} \right) x^{s/2-1} dx \right) \quad (3.3)$$

Hoewel we begonnen met een uitdrukking van de Γ -functie die alleen geldig was voor $\sigma > 0$ convergeert deze oneigenlijke integraal voor elke $s \in \mathbb{C}$, omdat de ϑ -functie exponentieel snel naar 1 gaat. \square

3.2.1 Gevolgen van de uitbreiding

Deze analytische uitbreiding heeft twee belangrijke gevolgen voor de waarden van de ζ -functie. Ten eerste kunnen we een paar punten makkelijk herkennen als nulpunten en zien we een pool. Er is bekend dat $\Gamma(s)$ polen van orde 1 heeft op $s = 0, -1, -2, \dots$. Er geldt dus dat $\zeta(s)$ nulpunten heeft op $-2, -4, -6, \dots$. $\zeta(0)$ is geen nulpunt omdat de pool bij $s = 0$ opgeheven wordt door de term $\frac{1}{s(s+1)}$. Deze nulpunten noemen we de *triviale nulpunten*. Verder zien we ook dat $\zeta(s)$ een pool van orde 1 heeft in $s = 1$.

Ten tweede zien we dat aan de rechterkant van (3.2) geldt dat zowel de integrand als de term $\frac{1}{s(s-1)}$ hetzelfde blijven als je s door $1 - s$ vervangt. We zien dus dat

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \quad (3.4)$$

Deze functionaalvergelijking is heel belangrijk bij het onderzoek naar de nulpunten. Hier wordt dieper op ingegaan in paragraaf 4.3.

3.2.2 Riemann-hypothese

Nu we de ζ -functie hebben uitgebreid tot alle complexe getallen behalve 1, kunnen we de Riemann-hypothese formuleren. Deze luidt als volgt:

“Het reële deel van elk niet-triviaal nulpunt van de Riemann-zèta-functie is $1/2$ ”

De lijn $1/2 + it$, waar deze nulpunten volgens de hypothese op liggen, wordt ook wel de *kritieke lijn* genoemd.

3.3 Andere schrijfwijzen

Er zijn nog veel andere handige manieren waarop we de ζ -functie kunnen schrijven. We presenteren nog drie manieren, waarbij de eerste de meest bekende is. Deze formule is ontdekt door Euler en koppelt de ζ -functie aan priemgetallen.

3.3.1 Productformule van Euler

De meest bekende identiteit met betrekking tot de ζ -functie is dat $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$, waar \mathbb{P} de verzameling priemgetallen is. De intuïtie hierachter is niet zo lastig, maar om het te bewijzen moet je toch wat meer werk verrichten. Eerst zullen we de intuïtie schetsen:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \\ \frac{1}{2^s}\zeta(s) &= \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \dots \end{aligned}$$

Nu halen we de onderste sommatie van de bovenste af en zien we dat alle termen waar n even is wegvallen:

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots$$

Nu doen we hetzelfde met $\frac{1}{3^s}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3^s}(1 - \frac{1}{2^s})\zeta(s) &= \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{21^s} + \dots \\ (1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{2^s})\zeta(s) &= 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \dots\end{aligned}$$

Nu zijn alle termen die een veelvoud van 2 of 3 zijn al weggewerkt. Zo vallen dus steeds meer getallen weg door alle priemgetallen langs te gaan. Als je dit dan ‘oneindig vaak doet’, krijg je

$$\dots(1 - \frac{1}{5^s})(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{2^s})\zeta(s) = 1$$

Dus

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

Een net bewijs gaat als volgt:

Stelling 3. Voor $\Re s > 1$ geldt

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

Bewijs. Laat $M, N \in \mathbb{N}$ met $M > N$. Dan is elke $n < N$ priemfactoriseerbaar op de volgende manier: $n = \prod p_i^{x_i}$, waar p_i priemgetallen en $x_i \geq 1$. Dan geldt dus sowieso voor elke i dat $p_i < N$, want anders $n \geq p_i > N$. Op dezelfde manier vinden we dat $x_i < M$ voor alle i , want anders $n \geq p_i^{x_i} > 2^M > M > N$.

Er geldt dus dat

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} &\leq \prod_{p \leq N, p \text{ priem}} (1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots + \frac{1}{p^{Ms}}) \\ &\leq \prod_{p \leq N, p \text{ priem}} \sum_{t=0}^{\infty} (p^{-s})^t \\ &= \prod_{p \leq N, p \text{ priem}} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \text{ want } |p^{-s}| = p^{-x} < 1 \text{ als } x > 1 \\ &\leq \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}\end{aligned}$$

Dit was voor een willekeurige N , dus we zien dat geldt dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (3.5)$$

Maar we zien ook dat

$$\prod_{p \leq N, p \text{ priem}} (1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots + \frac{1}{p^{Ms}}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Dit is omdat de linkerkant uitschrijven een eindig aantal termen van de rechterkant geeft.

Als we aan de linkerkant M naar oneindig laten gaan zien we dat

$$\prod_{p \leq N, p \text{ priem}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Nu kunnen we ook N naar oneindig laten gaan:

$$\prod_{p \text{ priem}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Dit combineren met (3.5) geeft

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1} \quad (3.6)$$

Merk op dat dit vanwege de convergentie van de oneindige som alleen geldt voor $\Re s > 1$. \square

3.3.2 Alternierende sommatie

Stelling 4. Voor $\Re s > 1$ geldt

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= 2 \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\ &= 2^{1-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \end{aligned}$$

We zien dus dat geldt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} = (2^{1-s} - 1)\zeta(s)$$

We kunnen dus concluderen dat

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \quad (3.7)$$

\square

3.3.3 Uitbreiding voor $\Re s > 0$

Voor de volgende stelling voeren we eerst de volgende notatie in: $x = [x] + \{x\}$, waarbij $[x] \in \mathbb{N}$ en $\{x\} \in \mathbb{R}$ en $0 \leq \{x\} < 1$. Als bijvoorbeeld geldt $x = 2\frac{1}{3}$, dan geldt $[x] = 2$ en $\{x\} = \frac{1}{3}$. Nu kunnen we de volgende stelling formuleren:

Stelling 5. Voor $\Re s > 0$ geldt

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \{x\} x^{-s-1} dx$$

Bewijs. We beginnen dit bewijs door de ζ -functie op een handige manier anders te schrijven:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + 2\left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right) + 3\left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s}\right) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right)\end{aligned}$$

Nu zien we dat voor alle $s \in \mathbb{C}$ het volgende geldt:

$$\int_n^{n+1} x^{-s-1} dx = \frac{1}{-s} ((n+1)^{-s} - n^{-s})$$

Er geldt dus

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} ns \int_n^{n+1} x^{-s-1} dx$$

We schrijven x nu als $x = [x] + \{x\}$. Als we de n nu in de integraal halen, kunnen we die n vervangen door $[x]$, dus krijgen we

$$\zeta(s) = s \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} [x] x^{-s-1} dx = s \int_1^{\infty} [x] x^{-s-1} dx$$

Er geldt natuurlijk $[x] = x - \{x\}$, dus dit is te schrijven als

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} x^{-s} - \{x\} x^{-s-1} dx$$

We zien dus dat geldt

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \{x\} x^{-s-1} dx \tag{3.8}$$

Deze integraal convergeert als $\Re s > 0$. □

Hoofdstuk 4

Nulpunten

Om iets nuttigs te kunnen zeggen over de Riemann-hypothese moeten we naar de nulpunten van de ζ -functie kijken. In dit hoofdstuk leiden we af dat de niet-triviale nulpunten in de strip $0 < \sigma < 1$ moeten liggen en maken we een schatting voor de hoeveelheid nulpunten tot een bepaalde hoogte.

4.1 De lijn $\zeta(1 + it)$

Al sinds 1800 wordt vermoed dat $\pi(x)$, de functie het aantal priemgetallen kleiner of gelijk aan het getal x telt, te benaderen is door de functie $x/\ln x$. De beroemde wiskundigen Legendre en Gauss voerden hier onafhankelijk van elkaar onderzoek op uit, hoewel de benadering van Gauss een iets andere vorm had. In 1850 bewees Chebyshev een iets zwakkere versie van deze stelling, namelijk dat als $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ bestaat, dat deze limiet dan gelijk moet zijn aan 1. Hij gebruikte hiervoor de ζ -functie. Merk op dat dit dus 9 jaar was voordat Riemann zijn beroemde werk over deze functie publiceerde. Riemann legde in dat werk de basis die Hadamard en De la Vallée Poussin onafhankelijk van elkaar nodig hadden om in 1896 de priemgetalstelling te bewijzen. Allebei gebruikten ze hierbij een belangrijke stap:

Stelling 6. *Voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt*

$$\zeta(1 + it) \neq 0$$

Bewijs. We beginnen dit bewijs met het herhalen van resultaat (3.6): Voor $\Re s > 1$ geldt

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

Als we aan allebei de kanten de logaritme nemen, vinden we

$$\log \zeta(s) = - \sum_p \log(1 - p^{-s})$$

Uit de machtreeksontwikkeling van $\log(1 - x)$ volgt nu dat

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= - \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} -n^{-1} p^{-sn} \\ &= \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} p^{-\sigma n} p^{-int} \\ &= \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} p^{-\sigma n} e^{-int \log p} \end{aligned}$$

We zien dus dat

$$\Re \log \zeta(s) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} p^{-\sigma n} \cos(nt \log p)$$

Er geldt dus voor alle $\sigma > 1$ dat

$$3\Re \log \zeta(\sigma) + 4\Re \log \zeta(\sigma + it) + \Re \log \zeta(\sigma + 2it) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} p^{-\sigma n} (3 + 4 \cos(nt \log p) + \cos(2nt \log p)) \quad (4.1)$$

Maar we zien ook dat $0 \leq 2(1 + \cos \theta)^2$ voor alle $\theta \in \mathbb{R}$ en dat

$$\begin{aligned} 2(1 + \cos \theta)^2 &= 2(1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= 2 + 4 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta \\ &= 3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta \end{aligned}$$

We zien dus dat de rechterkant van (4.1) groter of gelijk is aan 0, dus dat geldt ook voor de linkerkant. Omdat $\log W = \log |W| + i \arg(W)$ vinden we nu dat

$$3 \log |\zeta(\sigma)| + 4 \log |\zeta(\sigma + it)| + \log |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 0$$

Als we nu aan allebei de kanten dit in de exponentfunctie stoppen, die strikt stijgend is, vinden we dat

$$|\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1 \quad (4.2)$$

Herinner dat dit allemaal geldt voor $\sigma > 1$.

Stel nu dat er een t_0 is zodat $\zeta(1 + t_0) = 0$. Merk op dat $t_0 \neq 0$, want we weten dat $\zeta(1)$ een pool is. We gaan nu een voor een de drie termen in (4.2) afschatten.

Ten eerste bestaan er een A en een D zodat er een omgeving rechts van $s = 1$ is waarin weten we dat $|\zeta(\sigma)| = \frac{D}{1-\sigma} + A$. Dit volgt uit de Laurentreeks van ζ , waar het principiële deel alleen uit de term $\frac{D}{1-\sigma}$ bestaat vanwege de enkelvoudige pool in $\sigma = 1$.

$|\zeta(\sigma + it_0)|$ kunnen we afschatten met behulp van de middelwaardestelling:

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma + it_0)| &= |\zeta(\sigma + it_0) - \zeta(1 + it_0)| \\ &= |\sigma - 1| |\zeta'(\sigma_0 + it_0)| \quad \text{voor een } \sigma_0 \text{ met } 1 < \sigma_0 < \sigma \\ &\leq B(\sigma - 1) \end{aligned}$$

Hier hangt B alleen van t_0 af.

Ook bestaat er vanwege de holomorfie van ζ rond $\sigma + 2it_0$ een C zodat $|\zeta(\sigma + 2it_0)| \leq C$ als $\sigma \rightarrow 1^+$. Merk op dat ook deze constante van t_0 af kan hangen.

We vinden dus dat

$$|\zeta^3(\sigma) \zeta^4(\sigma + it_0) \zeta(\sigma + 2it_0)| \leq \left(\frac{D}{1-\sigma} + A \right)^3 B^4 (1-\sigma)^4 C$$

Maar de rechterkant gaat naar 0 als $\sigma \rightarrow 1^+$, dus dit is in tegenspraak met (4.2). \square

4.2 De functie ξ en de kritieke strip

Met dit resultaat kunnen we een belangrijke conclusie doen over de locatie van de niet-triviale nulpunten. We hadden in (3.6) gezien dat $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$. Hieraan is gemakkelijk te zien dat er dus geen nulpunten van ζ zijn als $\Re s > 1$. Verder maken we gebruik van een belangrijke hulpfunctie:

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \quad (4.3)$$

Er geldt, vanwege vergelijking (3.4), dat $\xi(s) = \xi(1-s)$. Verder geldt dat de nulpunten van $\xi(s)$ precies de niet-triviale nulpunten van $\zeta(s)$ zijn. Immers, de triviale nulpunten van $\zeta(s)$ vallen weg tegen de polen die $\Gamma(s)$ daar heeft, en de nulpunten van de term $s(s-1)/2$ worden opgeheven door respectievelijk de gamma functie en de singulariteit in $\zeta(1)$. Hieruit, en uit het feit dat $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, volgt ook dat $\xi(1) = \frac{1}{2}$. De singulariteit die ζ heeft in 1 komt dus niet voor in ξ . Uit het feit dat $\zeta(s)$ geen nulpunten heeft als $\Re(s) > 1$ en dat $\xi(s)$ symmetrisch is ten opzichte van $\frac{1}{2}$ zien we dus dat alle nulpunten in het gebied met $0 \leq \Re(s) \leq 1$ liggen. Dit wordt ook wel de *kritieke strip* genoemd.

Ook geldt

$$\overline{\xi(\bar{s})} = \xi(s)$$

Dit volgt direct uit de definitie van $\xi(s)$, omdat alle i 's in ξ bevat zijn in de s 'en. Er volgt dus dat als s_0 een nulpunt is van ξ , dan geldt dat ook \bar{s}_0 een nulpunt is. De nulpunten zijn dus symmetrisch in de reële as. Merk op dat dit niet alleen voor ξ geldt, maar ook voor ζ zelf.

4.3 Het tellen van nulpunten

Laat

$$N(T) = \#\{\sigma + it : \zeta(\sigma + it) = 0, 0 \leq \sigma \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$$

het aantal nulpunten waarvan het imaginaire deel tussen 0 en T ligt. De volgende stelling legt een verband tussen $N(T)$ en T . Riemann formuleerde deze stelling als vermoeden, omdat hij het laatste deel van het bewijs niet af kon ronden. Het bewijs werd pas in 1905 afgerond door Von Mangoldt.

Stelling 7. *Het aantal nulpunten tot hoogte T is*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \left(\frac{T}{2\pi} \right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

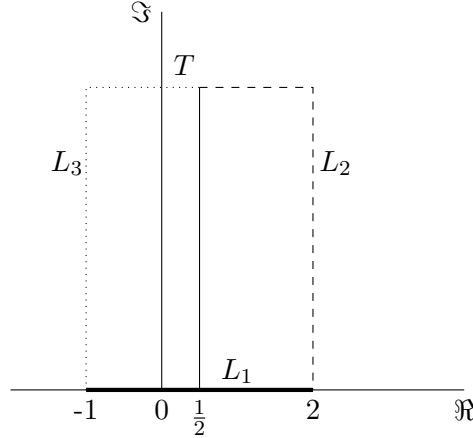
Bewijs. Om de niet-triviale nulpunten van ζ tot een bepaalde hoogte te tellen, kunnen we ook naar de nulpunten van ξ kijken. Vanwege de symmetrie die hierboven is genoemd, is het voldoende om alleen de nulpunten met een positief imaginair deel te beschouwen. Hiervoor gebruiken we een stelling uit de complexe analyse die bekend staat als ‘The Argument Principle’:

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(N - P)$$

Hierbij is N het aantal nulpunten en P het aantal polen van f binnen de enkelvoudig gesloten curve C , waarbij f geen nulpunten of polen op C heeft. Hierbij tellen we de multipliciteiten van de nulpunten en orde van de polen mee. Ook moet C tegen de klok in georiënteerd zijn. Omdat

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \log(f(z))$$

en ξ geen polen heeft, zien we dat het aantal nulpunten binnen een gebied gelijk is aan het verschil in argument van $\xi(s)$ over C . Nu moeten we dus op een handige manier een contour kiezen waar de kritieke strip, waar alle nulpunten van ξ zich bevinden, in bevat is.



Laat C de contour zijn die bestaat uit 3 stukken:

- L_1 loopt van -1 tot 2 (dikgedrukt)
- L_2 loopt van 2 naar $2 + Ti$ en van daar weer naar $1/2 + Ti$ (gestreept)
- L_3 sluit deze contour door vanaf $1/2 + Ti$ via $-1 + Ti$ naar -1 te gaan (gestippeld)

We voeren de volgende notatie in: $\Delta_C \arg(f)$ is de verandering in argument van f over het lijnstuk C .

Op L_1 neemt ξ alleen maar reële waarden aan, dus geldt $\Delta_{L_1} \arg(\xi(s)) = 0$. Uit symmetrie volgt dat $\Delta_{L_2} \arg(\xi(s)) = \Delta_{L_3} \arg(\xi(s))$, dus zien we

$$N(T) = \frac{1}{\pi} \Delta_{L_2} \arg(\xi(s))$$

Om dit uit te rekenen schrijven we ξ eerst een beetje anders, met behulp van de belangrijke eigenschap $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$:

$$\xi(s) = (s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2+1)\zeta(s)$$

Deze 4 termen gaan we een voor een langs:

$$\begin{aligned} \Delta_{L_2} \arg(s-1) &= \arg(1/2 + iT - 1) - \arg(2-1) \\ &= \arg(-1/2 + iT) \\ &= \pi/2 - \arctan\left(-\frac{1}{2T}\right) \\ &= \pi/2 + \arctan\left(\frac{1}{2T}\right) \\ &= \pi/2 + O(T^{-1}) \end{aligned}$$

Nu kijken we naar wat er met $\pi^{-s/2}$ gebeurt over het de kromme L_2 :

$$\begin{aligned}
\Delta_{L_2} \arg(\pi^{-s/2}) &= \Delta_{L_2} \arg(e^{-s/2 \log \pi}) \\
&= \arg(e^{-1/2(1/2+iT) \log \pi}) - \arg(e^{-1/2 \cdot 2 \log \pi}) \\
&= \arg(e^{-\log \pi/4 - iT \log \pi/2}) \\
&= -\frac{T}{2} \log \pi
\end{aligned}$$

Hetzelfde doen we voor $\Gamma(s/2 + 1)$:

$$\begin{aligned}
\Delta_{L_2} \arg(\Gamma(s/2 + 1)) &= \Delta_{L_2} \arg(e^{\log \Gamma(s/2+1)}) \\
&= \Im(\log \Gamma(\frac{1/2 + iT}{2} + 1)) \\
&= \Im(\log \Gamma(5/4 + iT/2))
\end{aligned}$$

De wiskundige Stirling heeft bewezen dat

$$\log(\Gamma(s)) = (s - 1/2) \log(s) - s + 1/2 \log(2\pi) + O(|s|^{-1})$$

Dat heeft als gevolg dat

$$\begin{aligned}
\Delta_{L_2} \arg\left(\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)\right) &= \Im\left(\left(\frac{3}{4} + \frac{T}{2}i\right) \log\left(\frac{5}{4} + \frac{T}{2}i\right) - \frac{5}{4} - \frac{T}{2}i + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O(|T|^{-1})\right) \\
&= \Im\left(\left(\frac{3}{4} + \frac{T}{2}i\right) \log\left(\frac{5}{4} + \frac{T}{2}i\right)\right) - \frac{T}{2} + O(T^{-1}) \\
&= \frac{3}{4} \arg\left(\frac{5}{4} + \frac{T}{2}i\right) + \frac{T}{2} \log\left|\frac{5}{4} + \frac{T}{2}i\right| - \frac{T}{2} + O(T^{-1}) \\
&= \frac{3\pi}{8} + \frac{T}{2} \log\left(\frac{T}{2}\right) + O(T^{-1})
\end{aligned}$$

Tot nu toe hebben we dus het volgende, waar $S(T) = \Delta_{L_2} \arg(\zeta(s))$:

$$\begin{aligned}
N(T) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{T \log \pi}{2} + \frac{3\pi}{8} + \frac{T}{2} \log\left(\frac{T}{2}\right) - \frac{T}{2} + O(T^{-1}) + S(T) \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{T}{2\pi} \left(\log\left(\frac{T}{2}\right) - \log(\pi) \right) - \frac{T}{2\pi} + O(T^{-1}) + \frac{S(T)}{\pi} \\
&= \frac{7}{8} + \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O(T^{-1}) + \frac{S(T)}{\pi}
\end{aligned}$$

Om $S(T)$ af te schatten gebruiken we dat $\Re \zeta(2 + ix) > \frac{1}{2}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dit zullen we niet bewijzen. Verder is dit deel van het bewijs grotendeels gebaseerd op de ideeën van [3]. Omdat $\Re \zeta(2 + iT) > 0$ geldt $|\arg(\zeta(2 + iT))| < \frac{\pi}{2}$. Laat nu q het aantal keer zijn dat $\Re \zeta(s) = 0$ tussen $2 + iT$ en $1/2 + iT$. Dan kunnen we het interval $(\frac{1}{2}, 2)$ in $q + 1$ stukken verdelen met $\Re \zeta(s) \geq 0$ of $\Re \zeta(s) \leq 0$ op elk van die stukken. Het verschil in argument op elk van die stukken is dus maximaal π , dus er geldt dat $\arg|\zeta(s)| \leq (q + 1)\pi + \frac{\pi}{2} = (q + \frac{3}{2})\pi$. Nu maken we gebruik van de functie $g(x) = \frac{\zeta(x+iT) + \zeta(x-iT)}{2} = \Re \zeta(x + iT)$, met $x \in (\frac{1}{2}, 2)$. Dan geldt dat q kleiner of

gelijk aan het aantal nulpunten van $g(x)$ is. Laat nu $n(r)$ het aantal nulpunten van $g(x)$ voor $|x - 2| < r$. Dan zien we dat $q \leq n(\frac{3}{2})$ en dat geldt

$$\int_0^2 \frac{n(r)}{r} dr \geq \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{n(r)}{r} dr \geq n(\frac{3}{2}) \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{r} dr = n(\frac{3}{2}) \log(\frac{4}{3})$$

Om een andere afschatting te maken gebruiken we de stelling van Jensen:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)| = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt$$

Waarin $n(t)$ het aantal nulpunten van f in de cirkelschijf met straal t rond de oorsprong is. Om dat in deze situatie toe te kunnen passen doen we het volgende:

$$\int_0^2 \frac{n(r)}{r} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(2 + 2e^{i\theta})| d\theta - \log |g(2)|$$

Verder zien we dat $-\log |g(2)| = -\log(\Re \zeta(2)) = -\log \frac{\pi^2}{6}$. We hebben tot nu toe dus dat

$$q \log(\frac{4}{3}) \leq n(\frac{3}{2}) \log(\frac{4}{3}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(2 + 2e^{i\theta})| d\theta - \log \frac{\pi^2}{6}$$

Er geldt dus dat q van dezelfde orde is als de integraal. Om die af te schatten hebben we een ander resultaat nodig.

Herinner dat we in (3.8) gezien hadden dat

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1} dx$$

voor $\Re s > 0$. In het bijzonder, als $0 < \sigma < 1$, dan hebben we

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma + it)| &= \left| \frac{\sigma + it}{(\sigma - 1) + it} - (\sigma + it) \int_1^\infty \{x\} x^{-\sigma - it - 1} dx \right| \\ &\leq \left| \frac{\sigma + it}{(\sigma - 1) + it} \right| + |\sigma + it| \int_1^\infty x^{-1 - \sigma} dx \\ &= O(t) \end{aligned}$$

als $t \rightarrow \pm\infty$.

We kunnen dus concluderen dat $g(2 + 2e^{i\theta})$ ook van orde $O(t)$ is, dus q is $O(\log t)$. We zagen al dat $S(T) \leq (q + \frac{3}{2})\pi$, dus $\frac{S(T)}{\pi} = O(\log T)$. Hieruit volgt dat

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) \quad (4.4)$$

□

Het is goed om op te merken dat het Riemann niet lukte om $S(T)$ af te schatten. Het was pas in 1905 dat Von Mangoldt dit als eerste bewees. Montgomery vermoedt dat het mogelijk is om te bewijzen dat

$$S(T) = O\left(\left(\frac{\ln T}{\ln \ln T}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

of zelfs

$$S(T) = O\left((\ln T \ln \ln T)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Tegenwoordig zijn er nog veel meer dingen bekend over de nulpunten van ζ . Zo heeft Conrey bewezen dat minstens $\frac{2}{3}$ van de nulpunten op de kritieke lijn liggen en zijn Vinogradov en Korobov er onafhankelijk van elkaar in 1958 achter gekomen dat $\zeta(s)$ geen nulpunten heeft in het gebied

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{(\log |t| + 1)^{\frac{2}{3}} (\log \log(3 + |t|))^{\frac{1}{3}}}$$

voor een bepaalde constance c . Er zijn nog veel meer van zulk soort resultaten te vinden, die ervan getuigen dat er nog veel meer te zeggen is over de nulpunten dan we hier hebben gedaan en doen vermoeden dat er nog veel meer te ontdekken is wat betreft deze nulpunten.

Hoofdstuk 5

Random matrices

In de jaren 30 van de 20^e eeuw kwam er een nieuwe wiskundig onderzoeksgebied naar boven. Men bestudeerde matrices waar de elementen geen vaste getallen waren, maar stochastische variabelen met een bepaalde kansverdeling. Natuurlijke vragen die bij zulke matrices gesteld worden zijn vragen als ‘wat kunnen we zeggen over de eigenwaarden?’ en ‘wat weten we over de eigenvectoren?’. Er werd niet heel veel onderzoek naar gedaan, tot in de jaren 50 zulke matrices gebruikt werden om het gedrag van neutronen in kernfysica te bestuderen. Daarna werd ook in andere takken van de wiskunde en natuurkunde, zoals dynamische systemen, elastodynamisch gedrag, kwantumgravitatie en snaartheorie, toepassingen gevonden voor dit concept. Maar waar Montgomery, bijna per toeval, achter kwam, is dat er ook een link is tussen de genormaliseerde nulpunten van de ζ -functie en de eigenwaarden van een bepaald soort random matrix. In dit hoofdstuk gaan we eerst in op dat soort matrices en daarna leggen we het verband uit. We sluiten het af met numerieke verificatie van dit verband.

5.1 Hermitische matrices

Het type matrix dat we gaan bestuderen zijn de $N \times N$ Hermitische matrices met elementen getrokken uit het zogenaamde Gaussian Unitary Ensemble (GUE). Deze matrices worden in de natuurkunde gebruikt om energie in atoomkernen te simuleren. Herinner dat een matrix Hermitisch is als $A = \overline{A^T}$, waarbij de conjugatie elementsgewijs genomen wordt. De matrices die we bekijken zijn $N \times N$ matrices van een bepaalde vorm: de diagonaalelementen $A_{i,i}$ zijn standaard normaal verdeeld. Voor $i > j$ geldt $A_{i,j} = \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}) + i\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ en $A_{j,i} = \overline{A_{i,j}}$, waarbij de twee normaal verdeelde stochasten onafhankelijk zijn.

Van Hermitische matrices weten we dat de eigenwaarden altijd volledig reëel zijn. Immers, laat A een Hermitische matrix zijn en λ een eigenwaarde met eigenvector v . Laat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het standaard inproduct op \mathbb{C} zijn. Dan geldt

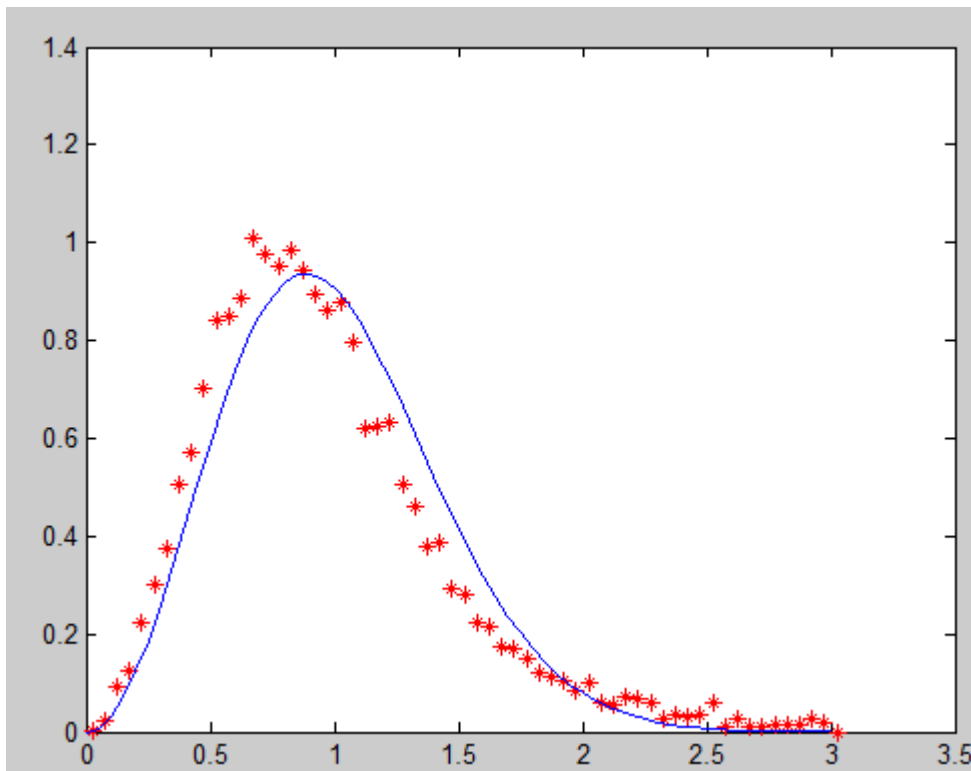
$$\begin{aligned}\lambda \langle v, v \rangle &= \langle \lambda v, v \rangle \\ &= \langle Av, v \rangle \\ &= \langle v, A^* v \rangle \\ &= \langle v, Av \rangle \\ &= \langle v, \lambda v \rangle \\ &= \overline{\lambda} \langle v, v \rangle\end{aligned}$$

Omdat v een eigenvector is geldt $v \neq \mathbf{0}$, dus kunnen we concluderen dat $\lambda = \overline{\lambda}$ en dus $\lambda \in \mathbb{R}$.

Als we naar alle N eigenwaarden van een $N \times N$ Hermitische matrix kijken, kunnen we iets zeggen over het verschil in die eigenwaarden. We normaliseren de eigenwaarden zodat de gemiddelde afstand tussen twee opeenvolgende eigenwaarden gelijk is aan 1. Daarna kunnen we ze op grootte sorteren en naar het verschil tussen de paren opeenvolgende eigenwaarden kijken. Dit heet ook wel de Nearest Neighbor Spacing (NNS). Het is bewezen ([6]) dat deze stochast de volgende kansdichtheid heeft:

$$P(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 e^{-\frac{4s^2}{\pi}}$$

Dit houdt in dat als je twee opeenvolgende eigenwaarden van een matrix neemt, ongeacht de grootte van deze matrix, dat het verschil beschouwd kan worden als een stochast die uit deze kansverdeling getrokken wordt. Het volgende plaatje laat dit zien. De matrix is gegenereerd zoals hierboven beschreven is met $N = 9000$. Een grotere N heb ik vanwege gebrek aan rekenkracht niet kunnen evalueren, maar de gelijkenis is evident. De rode sterretjes representeren het aantal keer dat de afstand tussen de twee eigenwaarden in het interval van grootte 0.05 terecht kwam. Bijvoorbeeld, het sterretje helemaal linksonder betekent dat er nauwelijks paren opeenvolgende eigenwaarden minder dan 0.05 van elkaar aflagen. De blauwe lijn is $P(s)$.

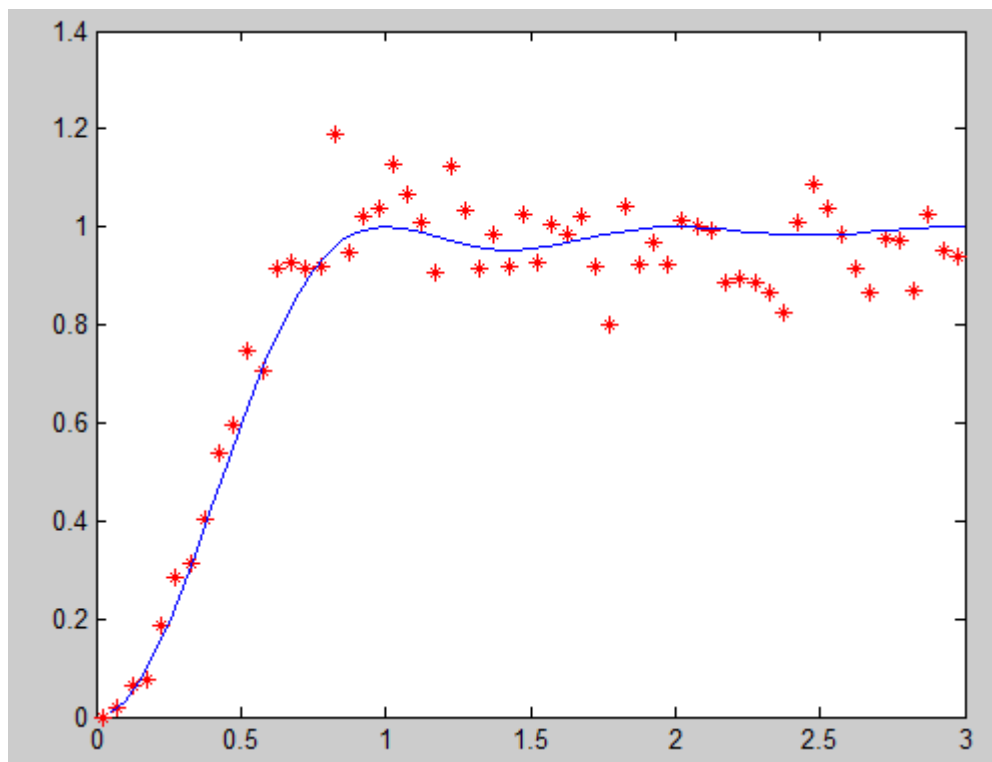


Figuur 5.1: Nearest neighbour verdeling van een 9000x9000 Hermitische matrix

Ook kunnen we kijken naar de zogenoemde *pair correlation*. Dit is vergelijkbaar met wat we eerder bekeken, maar er wordt nu niet meer gekeken naar het verschil tussen opeenvolgende paren eigenwaarden: elke combinatie eigenwaarden wordt in beschouwing genomen. In [2] wordt bewezen dat deze verdeling gelijk is aan

$$1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2$$

Dit ben ik weer numeriek nagegaan:



Figuur 5.2: Pair correlation van een 3000x3000 Hermitische matrix

5.2 ζ -functie en random matrices

5.2.1 Pair correlation

De wiskundige Montgomery opperde in 1972 dat de pair correlation van de genormaliseerde nulpunten van de ζ -functie gelijk is aan

$$1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2$$

We zagen in (4.4) al dat het aantal nulpunten N met imaginair deel positief en kleiner dan T gelijk is aan

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

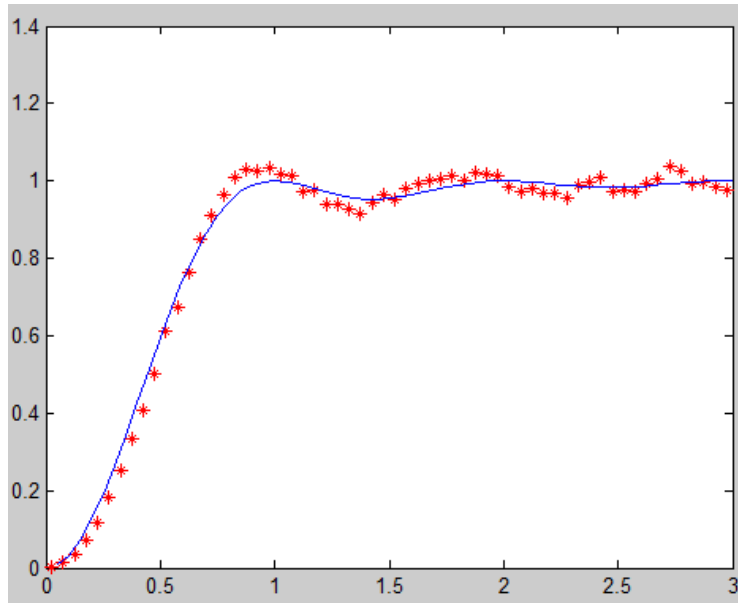
Aan de hand hiervan kunnen we de nulpunten normaliseren. Laat γ_n het imaginaire deel van het n 'de nulpunt zijn. Als $T \rightarrow \infty$ geldt $N(T) \rightarrow \frac{T \log T}{2\pi}$. Nu laten we $\hat{\gamma}_n = \frac{\gamma_n \log \gamma_n}{2\pi}$ en bekijken we het verschil $\delta_n = \hat{\gamma}_{n+1} - \hat{\gamma}_n$. Vanwege de normalisatie geldt in het algemeen dat hoe meer nulpunten je bekijkt, hoe dichter het gemiddelde verschil bij 1 ligt.

Montgomery deed dit door Riemanns hypothese en een aantal stellingen over priemgetallen voor waar aan te nemen en aan de hand hiervan verder te redeneren. Details zijn te vinden in [4]. Een van de grondleggers van de wiskundige theoriën achter random matrices, Dyson, wees hem erop dat de pair correlation van ζ dezelfde is als die van de matrices die we hierboven hebben besproken. In [4] schrijft Montgomery het volgende:

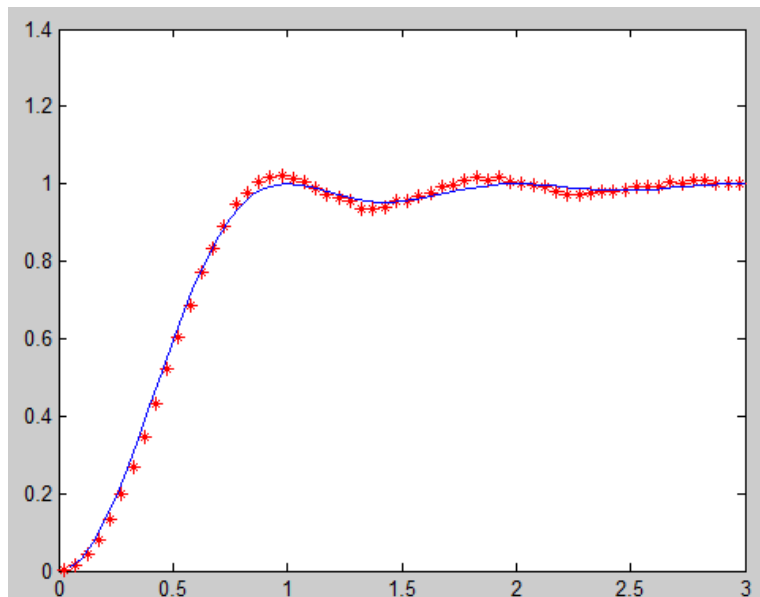
It would be interesting to see how numerical evidence compares with the above conjectures. The first several thousand zeros have been computed, so it would not be

difficult to assemble relevant statistics. However, data on the failures of “Gram’s law” indicate that the asymptotic behaviour is approached very slowly. Thus the numerical evidence may not be particularly illuminating.

Andrew Odlyzko hield zich veel bezig met algoritmen die nulpunten van de ζ -functie te berekenen. Hij vond miljoenen nulpunten en in 1989 publiceerde hij een paper waarin hij deed wat Montgomery nog niet kon. Hij vond de volgende resultaten voor de pair correlation van de genormaliseerde nulpunten van ζ , waarmee hij dit vermoeden volledig empirisch bevestigde:



Figuur 5.3: De pair correlation van de eerste 10^5 nulpunten van ζ

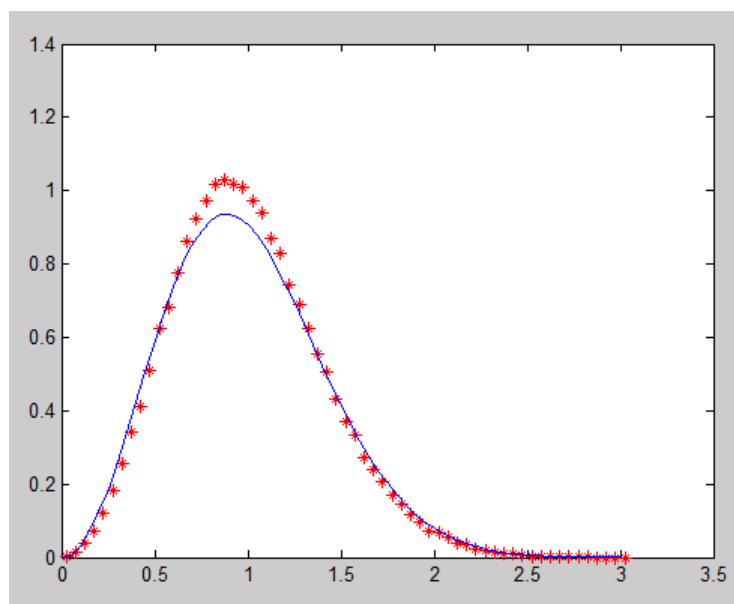


Figuur 5.4: De pair correlation van de eerste 10^6 nulpunten van ζ

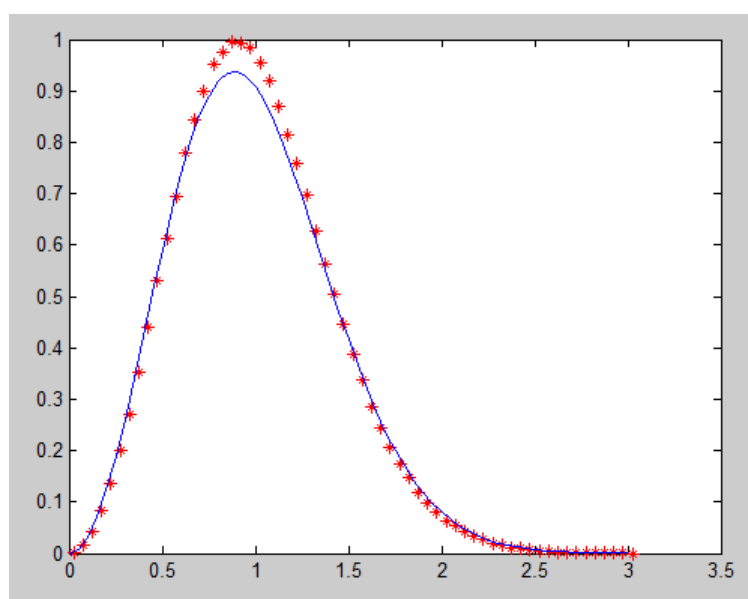
Voor het maken van deze verbluffende plots zijn Odlyzko's nulpunten gebruikt zoals te vinden op [10]. De matlab code is te vinden in de appendix.

5.2.2 Nearest Neighbour Spacing

Omdat de pair correlation van genormaliseerde nulpunten van ζ en de genormaliseerde eigenwaarden van zulke matrices hetzelfde zijn, is het natuurlijk om te vragen of dit ook geldt voor andere eigenschappen van deze waarden. Zo lijkt ook de nearest neighbour spacing van de ζ -functie op die van de GUE Hermitische matrices:



Figuur 5.5: Nearest neighbour verdeling van de eerste 100,000 nulpunten



Figuur 5.6: Nearest neighbour verdeling van de eerste 2,000,000 nulpunten

Ook hier weer is de gelijkenis overduidelijk. Er zijn natuurlijk nog veel meer eigenschappen die vergeleken kunnen worden - en een heel aantal van die eigenschappen komen ook overeen. J. P. Keating en N. C. Snaith hebben [11] nog veel meer verbanden gelegd tussen Hermitische matrices en ζ , maar hier zullen we verder niet op in gaan.

Vanwege deze resultaten wordt er op dit moment vermoed dat de nulpunten van Riemann's ζ -functie de eigenwaarden van een bepaalde Hermitische operator zijn. Dit vermoeden heet het vermoeden van Hilbert-Pólya en het wordt gezien als een van dé manieren waarmee vorderingen kunnen worden gemaakt in het bewijzen (of weerleggen!) van de Riemann-hypothese.

Hoofdstuk 6

Bernoulli-getallen

Het is mogelijk om de exacte waarden van de ζ -functie op getallen in \mathbb{Z} uit te rekenen. Dit kan gedaan worden met behulp van zogenaamde Bernoulli-getallen. Deze getallen zijn vernoemd naar Jacob Bernoulli, die een formule op wilde stellen om eindige sommen van machten van opeenvolgende gehele getallen uit te rekenen:

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i^k = 1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k$$

Tegenwoordig wordt deze rij getallen $(B_n)_n$ formeel gedefiniëerd met behulp van de volgende formule:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2!} \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{4!} \frac{1}{30}z^4 + \frac{1}{6!} \frac{1}{42}z^6 + \dots \quad (6.1)$$

Bernoulli vond deze rij getallen niet door deze definitie, maar kreeg dit voor elkaar door een polynoom op te stellen met n als variabele en met graad $k+1$. Zo hebben we bijvoorbeeld

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

en

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

en

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

In deze drie formules is al een patroon zichtbaar: voor de coëfficiënt met de hoogste macht staat $\frac{1}{k+1}$, voor de eennaagste staat $-\frac{1}{2}$ en voor de derde, als die er is, staat $\frac{k}{12}$. Dit blijft zich voortzetten, ook als we naar hogere k kijken. Het is ook niet toevallig dat bij $S_3(n)$ geen term met n staat, want termen 4, 6, 8, ... blijken allemaal gelijk aan 0 te zijn. Vanwege redenen waar in deze scriptie niet op zullen worden gegaan is het handig om voor al deze termen aan te passen met de factor

$$\frac{1}{k+1} \binom{k+1}{j}$$

Dan geldt dat

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j}$$

De rationale getallen B_j die hieraan voldoen zijn de Bernoulli-getallen:

n	B_n
0	1
1	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$
3	0
4	$-\frac{1}{30}$
5	0
6	$\frac{1}{42}$
7	0
8	$-\frac{1}{30}$

Tabel 6.1: De eerste 9 Bernoulli-getallen

Meer informatie over Bernoulli-getallen is te vinden in [7].

Deze getallen worden in veel takken in de wiskunde gebruikt en voldoen aan een aantal vergelijkingen. Zo volgt uit (6.1) onder andere dat

$$x = (e^x - 1) \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

De term voor x^n wordt hier dus $\sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(n-m)!m!} B_m$. Dit vermenigvuldigen met $n!$ geeft de recursieve betrekking

$$\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} B_m = 0,$$

oftewel

$$\sum_{m=0}^n \binom{n+1}{m} B_m = 0$$

Deze uitdrukking is geldig voor alle $n > 1$ en gaat uit van $B_0 = 1$. Dit is de meest bekende recursieve relatie voor de Bernoulli-getallen. Wij hebben echter een iets andere versie van deze uitspraak nodig, die iets lastiger is om af te leiden:

Stelling 8. Voor $n \geq 1$ geldt

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{B_{n-m}}{m+1} = 0$$

Bewijs. We zagen hiervoor al dat $\sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(n-m)!m!} B_m = 0$. We leiden het volgende af:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)!k!} B_k, \text{ dus} \\ 0 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+1-k)!k!} B_k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!k!} \frac{B_k}{n+1-k} \end{aligned}$$

Hieruit kunnen we concluderen dat

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{B_k}{n+1-k} = 0$$

Nu voeren we de substitutie $m = n - k$ uit, waaruit volgt dat $k = n - m$:

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{n-m} \frac{B_{n-m}}{m+1} = 0$$

We weten dat $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$, dus geldt

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{B_{n-m}}{m+1} = 0 \quad (6.2)$$

□

Zoals al eerder genoemd zijn deze getallen belangrijk bij het evalueren van de ζ -functie op reële, gehele getallen. Zo hebben we de volgende gelijkheid, zoals genoemd in [8]:

6.1 Uitdrukking voor $\zeta(2k)$

Stelling 9.

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} (2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!} \quad (6.3)$$

Bewijs. Om dit te bewijzen beginnen we met de volgende gelijkheid, die geldt voor alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

We maken de substitutie $z = -\frac{i}{2}u$ en nemen vervolgens aan allebei de kanten de logaritme:

$$\log \sin\left(-\frac{i}{2}u\right) = \log\left(-\frac{i}{2}u\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{u^2}{4k^2\pi^2}\right) \quad (6.4)$$

We nemen aan allebei de kanten de afgeleide. Aan de linkerkant krijgen we het volgende:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \log \sin\left(-\frac{i}{2}u\right) &= \frac{1}{\sin\left(-\frac{i}{2}u\right)} \cdot -\frac{i}{2} \cos\left(-\frac{i}{2}u\right) \\ &= -\frac{i}{2} \frac{\cos\left(-\frac{i}{2}u\right)}{\sin\left(-\frac{i}{2}u\right)} \\ &= -\frac{i}{2} i \coth\left(\frac{u}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^u + 1}{e^u - 1} \end{aligned}$$

Aan de rechterkant zien we:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \log\left(-\frac{i}{2}u\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{u^2}{4k^2\pi^2}\right) &= \frac{1}{u} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2u}{4\pi^2 k^2} \frac{1}{1 + \frac{u^2}{4\pi^2 k^2}} \\ &= \frac{1}{u} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u}{4\pi^2 k^2 + u^2} \end{aligned}$$

Verder geldt er het volgende:

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^u - 1} + \frac{1}{2} &= \frac{2}{2e^u - 2} + \frac{e^u - 1}{2e^u - 2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^u + 1}{e^u - 1}\end{aligned}$$

Als we deze drie uitspraken invullen in (6.4) vinden we dat

$$\frac{1}{e^u - 1} = \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u}{4\pi^2 k^2 + u^2}$$

Dus

$$\frac{u}{e^u - 1} = 1 - \frac{u}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^2}{4\pi^2 k^2 + u^2}$$

Herinner dat we in (6.1) zagen dat

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k} z^{2k}}{(2k)!} + 1 - \frac{z}{2}$$

Dit laatste is omdat $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ en $B_{2k+1} = 0$ voor $k \geq 1$.

Voor $|u| < 2\pi$ geldt dus

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k} u^{2k}}{(2k)!} &= 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{u^2}{4\pi^2 r^2 + u^2} \\ &= 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{u^2}{4\pi^2 r^2} \frac{1}{1 + \frac{u^2}{4r^2\pi^2}} \\ &= 2 \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{u^2}{4\pi^2 r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-u^2}{4\pi^2 r^2} \right)^k \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^{k+1} \left(\sum_{r=1}^{\infty} (4\pi^2 r^2)^{-k} \right) u^{2k} \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (2\pi)^{-2k} \zeta(2k) u^{2k}\end{aligned}$$

Als we nu aan allebei de kanten de coëfficiënten voor u^{2k} gelijkstellen vinden we

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!} = 2(-1)^{k+1} (2\pi)^{-2k} \zeta(2k)$$

Oftewel

$$\zeta(2k) = \frac{B_{2k} (-1)^{k+1} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$$

□

Zo vinden we bijvoorbeeld voor $k = 1$ een oplossing voor het Bazel-probleem waarbij we alleen maar in hoeven te vullen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\frac{1}{6} \cdot 4\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}$$

6.2 Uitdrukking voor $\zeta(1 - k)$

Een andere, meer eenvoudige, gelijkheid omtrent Bernoulli-getallen en ζ is als volgt ([9]):

Stelling 10. Voor $k \geq 1$ geldt

$$\zeta(1 - k) = -\frac{B_k}{k} \quad (6.5)$$

Bewijs. Allereerst merken we op dat dit, omdat $B_k = 0$ voor $k \geq 3$ en oneven, hetzelfde is als

$$\zeta(1 - k) = (-1)^{k-1} \frac{B_k}{k}$$

We zagen in (3.8) al dat voor $\Re s > 0$ geldt

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$$

Deze integraal kunnen we iets anders schrijven:

$$\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^{s+1}} dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^1 \frac{u}{(u+n)^{s+1}} du$$

Hier is in de laatste stap de substitutie $u = x - n$ uitgevoerd.

Deze integraal kunnen we met behulp van partiële integratie anders schrijven:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{u}{(u+n)^{s+1}} du &= \frac{1}{2} \frac{u^2}{(u+n)^{s+1}} \Big|_{u=0}^{u=1} + \int_0^1 \frac{u^2}{2} \frac{s+1}{(u+n)^{s+2}} du \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)^{s+1}} + \frac{s+1}{2} \int_0^1 \frac{u^2}{(u+n)^{s+2}} du \end{aligned}$$

We vinden dus dat

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \\ &= \frac{s}{s-1} - \frac{s}{2} \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)^{s+1}} \right) - \frac{s(s+1)}{2} \int_1^\infty \frac{\{x\}^2}{x^{s+2}} dx \\ &= \frac{s}{s-1} - \frac{s}{2} (\zeta(s+1) - 1) - \frac{s(s+1)}{2} \int_1^\infty \frac{\{x\}^2}{x^{s+2}} dx \end{aligned}$$

Merk op dat de uitdrukking aan de rechterkant convergeert voor $\Re s > -1$. Ook geeft deze uitdrukking een manier om $\zeta(0)$ uit te rekenen: als we $s = 0$ invullen, zien we dat alles 0 wordt aan de rechterkant, behalve de term $\frac{s}{2} \zeta(s+1)$. Immers, de singulariteit in $\zeta(1)$ valt weg tegen $\frac{s}{2}$ en dit geeft dat $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

We kunnen de uitdrukking die we nu hebben gevonden weer partiëel integreren. Dit proces kunnen we zo vaak herhalen als we willen. In het algemeen geldt voor $m \in \mathbb{N}$ dat

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 1 + \frac{1}{s-1} - \sum_{r=1}^m \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+r-1)}{(r+1)!} (\zeta(s+r) - 1) \\ &\quad - \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+m)}{(m+1)!} \sum_{n=1}^\infty \int_0^1 \frac{u^{m+1}}{(u+n)^{m+s+1}} du \end{aligned}$$

Dit convergeert voor $\Re s > -m$. Er geldt dus dat dit de waarde $\zeta(1-m)$ vastlegt. Als we $s = 1 - m$ invullen zien we dat de term voor de integraal 0 wordt. Die term is namelijk

$$\frac{(1-m)(2-m)(3-m)\dots((m-1)+1-m)(m+1-m)}{(m+1)!}$$

De voorlaatste term in de teller is gelijk aan 0. Verder is het goed om op te merken dat in de som het volgende geldt:

$$\begin{aligned} \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+m)}{(m+1)!} &= \frac{(1-m)(2-m)(3-m)\dots(r-1-m)}{(r+1)!} \\ &= (-1)^r \frac{(m-1)!}{(r+1)!(m-1-r)!} \\ &= (-1)^r \binom{m-1}{r} \frac{1}{r+1} \end{aligned}$$

Dus we vinden

$$\zeta(1-m) = 1 - \frac{1}{m} - \sum_{r=1}^m (-1)^r \binom{m-1}{r} \frac{1}{r+1} (\zeta(r+1-m) - 1)$$

De term $r = m$ in deze sommatie een geeft handig resultaat. Deze is namelijk gelijk aan

$$\begin{aligned} (-1)^m \binom{m-1}{m} \frac{1}{m+1} (\zeta(1) - 1) &= (-1)^m \frac{(m-1)!}{m! \Gamma(-1)} \frac{1}{m+1} (\zeta(1) - 1) \\ &= (-1)^m \frac{1}{m(m+1)} \end{aligned}$$

Hier vallen de singulariteiten in $\Gamma(-1)$ en $\zeta(1)$ precies tegen elkaar weg. Concluderend hebben we dus gevonden dat

$$\zeta(1-m) = 1 - \frac{1}{m} + \frac{(-1)^m}{m(m+1)} - \sum_{r=1}^{m-1} (-1)^r \binom{m-1}{r} \frac{1}{r+1} (\zeta(r+1-m) - 1) \quad (6.6)$$

Dit kunnen we nog meer herschrijven. Immers, het is bekend dat

$$(1-x)^{m-1} = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{m-1}{r} (-1)^r x^r$$

Als we dit aan allebei de kanten integreren, vinden we dat

$$-\frac{(1-x)^m}{m} + c = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{m-1}{r} (-1)^r \frac{x^{r+1}}{r+1}$$

Om c te berekenen vullen we $x = 0$ in:

$$-\frac{1}{m} + c = 0$$

We zien dus dat

$$\frac{1 - (1-x)^m}{m} = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{m-1}{r} (-1)^r \frac{x^{r+1}}{r+1}$$

Als we hierin $x = 1$ invullen vinden we dat

$$\frac{1}{m} = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{m-1}{r} (-1)^r \frac{1}{r+1} \quad (6.7)$$

Dit kunnen we invullen in (6.6). Merk op dat daar de som bij $r = 1$ begint en in (6.7) bij $r = 0$. De term bij $r = 0$ levert 1, dus ook de allereerste 1 in (6.6) valt weg:

$$\zeta(1 - m) = \frac{(-1)^m}{m(m+1)} - \sum_{r=1}^{m-1} (-1)^r \binom{m-1}{r} \frac{1}{r+1} \zeta(r+1-m)$$

Allebei de kanten met m vermenigvuldigen levert

$$m\zeta(1 - m) = \frac{(-1)^m}{m+1} - m \sum_{r=1}^{m-1} (-1)^r \binom{m-1}{r} \frac{1}{r+1} \zeta(r+1-m)$$

Nu gaan we inductief verder. Invullen laat duidelijk zien dat (6.5) klopt voor $m = 1$. Laat nu m vast en neem aan dat (6.5) geldt voor alle gehele getallen kleiner dan m . Dan kunnen we schrijven dat

$$m\zeta(1 - m) = \frac{(-1)^m}{m+1} + (-1)^m \sum_{r=1}^{m-1} \binom{m}{r} \frac{B_{m-r}}{r+1}$$

De term in de som bij $r = m - 1$ buiten de som halen levert ons

$$m\zeta(1 - m) = \frac{(-1)^m}{m+1} + (-1)^m \sum_{r=1}^{m-1} \binom{m}{r} \frac{B_{m-r}}{r+1} - (-1)^{m-1} \zeta(0)$$

Met behulp van (6.2) zien we dat

$$\sum_{r=1}^{m-2} \binom{m}{r} \frac{B_{m-r}}{r+1} = - \left(B_m + B_1 + \frac{B_0}{m+1} \right)$$

We vinden dus

$$\begin{aligned} m\zeta(1 - m) &= \frac{(-1)^m}{m+1} - (-1)^m \left(B_m - \frac{1}{2} + \frac{1}{m+1} \right) - \frac{(-1)^m}{2} \\ &= (-1)^{m-1} B_m \\ \zeta(1 - m) &= (-1)^{m-1} \frac{B_m}{m} \end{aligned}$$

□

Hoofdstuk 7

Algoritme

Het zoeken naar nulpunten gaat natuurlijk volledig digitaal. Hiervoor is een efficiënte manier nodig om zulke de ζ -functie te evalueren, bij voorkeur in de lijn $\frac{1}{2} + it$. In deze paragraaf behandelen we twee versies van een algoritme dat voor elke $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ een willekeurig nauwkeurige benadering geeft. Dit algoritme zullen we in het volgende hoofdstuk gebruiken om Bernoulli-getallen te berekenen.

7.1 Basis van het algoritme

Laat $p_n(x)$ een reëel polynoom zijn:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_i \in \mathbb{R} \text{ voor alle } i \leq n,$$

met de eigenschap dat $p_n(-1) \neq 0$. We gaan dit polynoom gebruiken om een algoritme op te stellen dat snel de waarde van $\zeta(s)$ kan benaderen. Hiervoor gebruiken we de volgende formule:

$$\frac{1}{(m+1)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 x^m |\log x|^{s-1} dx \quad (7.1)$$

Herinner dat we in (3.7) zagen dat als $\Re s > 0$, dan

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

We kunnen dit nu schrijven als

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(s)} \int_0^1 x^{n-1} |\log x|^{s-1} dx \right) \\ &= \frac{1}{(1 - 2^{1-s})\Gamma(s)} \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} \right) |\log x|^{s-1} dx \\ &= \frac{1}{(1 - 2^{1-s})\Gamma(s)} \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} \right) |\log x|^{s-1} dx \\ &= \frac{1}{(1 - 2^{1-s})\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{|\log x|^{s-1}}{1+x} dx \end{aligned}$$

We mogen de integraal en sommatie omwisselen omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^{n-1} |\log x|^{s-1} dx$ convergeert voor $\Re s > 0$.

Verder geldt

$$\int_0^1 \frac{p_n(x) |\log(x)|^{s-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{p_n(-1) |\log(x)|^{s-1}}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{(p_n(-1) - p_n(x)) |\log(x)|^{s-1}}{1+x} dx$$

Dus nu kunnen we

$$R_n(s) := \frac{1}{p_n(-1)(1-s^{1-s})\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{p_n(x) |\log x|^{s-1}}{1+x} dx$$

herschrijven in de volgende vorm:

$$\begin{aligned} R_n(s) &= \frac{1}{(1-s^{1-s})\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{|\log x|^{s-1}}{1+x} dx - \frac{1}{p_n(-1)(1-s^{1-s})\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{(p_n(-1) - p_n(x)) |\log x|^{s-1}}{1+x} dx \\ &= \zeta(s) - \frac{1}{p_n(-1)(1-s^{1-s})\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{(p_n(-1) - p_n(x)) |\log x|^{s-1}}{1+x} dx \end{aligned}$$

Nu definiëren we c_j als volgt:

$$c_j := (-1)^j \left(\sum_{k=0}^j (-1)^k a_k - p_n(-1) \right)$$

Dit zijn, op soms een minteken na, de coëfficiënten van $\frac{p_n(x) - p_n(-1)}{1+x}$. Nu zien we dat met behulp van (7.1) geldt dat

$$\frac{1}{p_n(-1)(1-s^{1-s})\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{(p_n(-1) - p_n(x)) |\log x|^{s-1}}{1+x} dx = \frac{-1}{(1-2^{1-s})p_n(-1)} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j}{(1+j)^s}$$

Oftewel

$$\zeta(s) = \frac{-1}{(1-2^{1-s})p_n(-1)} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j}{(1+j)^s} + R_n(s)$$

Verdere details van deze berekening zijn te vinden in [5].

We gaan nu een tweetal polynomen bekijken. Het eerste algoritme maakt gebruik van Chebyshev-polynomen, die een relatief grote waarde hebben op -1 ten opzichte van andere polynomen met vergelijkbare supremumnorm over $[0, 1]$. Het tweede polynoom is zo gekozen dat de restterm volledig wegvalt op sommige punten.

7.2 Chebyshev-polynomen

Nu is het handig om een polynoom te kiezen dat de restterm $R_n(s)$ zo klein mogelijk maakt. Zo kunnen we bijvoorbeeld de Chebyshev-polynomen op $[0, 1]$ kiezen:

$$T_n(x) = (-1)^n n \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-k)!(2k)!} 4^k x^k$$

Dan geldt dat als

$$d_k := n \sum_{i=0}^k \frac{(n+i-1)!4^i}{(n-i)!(2i)!}$$

dat

$$\zeta(s) = \frac{-1}{d_n(1-2^{1-s})} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k(d_k - d_n)}{(k+1)^s} + R_n(s) \quad (7.2)$$

Om dit te zien moeten we opmerken dat $d_n = T_n(-1)$ en $d_k - d_n = c_n$. Nu gaan we de restterm afschatten.

Van de Chebyshev-polynomen is bekend dat $|T_n(x)| \leq 1$ als $x \in [0, 1]$ en $T_n(-1) \geq \frac{1}{2}(3 + \sqrt{8})^n$, dus voor de restterm geldt

$$\begin{aligned} |R_n(s)| &= \left| \frac{1}{d_n(1-2^{1-s})} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{T_n(x) |\log x|^{s-1}}{1+x} dx \right| \\ &\leq \frac{2}{(3 + \sqrt{8})^n} \frac{1}{|(1-2^{1-s}\Gamma(s))|} \int_0^1 \frac{|\log x|^{s-1}}{1+x} dx \end{aligned}$$

Als $\Re s \geq \frac{1}{2}$, dan

$$\int_0^1 \frac{|\log x|^{1-s}}{1+x} dx \leq \int_0^1 \frac{|\log x|^{\frac{1}{2}}}{1+x} dx \leq 0.68$$

Verder hebben we de volgende identiteit, als we weer schrijven dat $s = \sigma + it$:

$$\left| \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(s)} \right|^2 = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{(\sigma+n)^2} \right)$$

Dus

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Gamma(s)|} &= \frac{\left(\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{(\sigma+n)^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}}{|\Gamma(\sigma)|} \\ &\leq \frac{\left(\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{(\frac{1}{2}+n)^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}}{|\Gamma(\sigma)|} \end{aligned}$$

Omdat

$$\sinh(s) = s \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s^2}{\pi^2 k^2} \right)$$

geldt ook

$$\sinh(\pi s) = \pi s \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s^2}{k^2} \right)$$

We zien dus dat

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{(\frac{1}{2}+n)^2} \right) = (1+4t^2) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{(\frac{1}{2}+n)^2} \right) \leq \frac{1+4t^2}{\pi t} \sinh(t\pi)$$

Verder is ook bekend dat $\Gamma(\sigma) \geq \frac{2}{3}$ als $\sigma \geq \frac{1}{2}$, dus als we dit alles combineren vinden we dat voor $\sigma \geq \frac{1}{2}$ geldt

$$R_n(s) \leq \frac{1.36 \cdot 1.5}{(3 + \sqrt{8})^n} \sqrt{\frac{1 + 4t^2}{t\pi} \sinh(t\pi)} \frac{1}{|1 - s^{1-s}|}$$

Nu hebben we een snel algoritme gevonden dat voor elke s in \mathbb{C} $\zeta(s)$ uit kan rekenen. Merk op dat hoe dichterbij s bij de reële as ligt, hoe sneller de convergentie is. Omdat

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 + 4t^2}{t\pi} \sinh(t\pi)} = 1$$

convergeert dit heel snel voor reële waarden van s .

7.3 Wegvallende restterm

Hiervoor gebruiken we het algoritme

$$p_n(x) = x^n(1 - x)^n$$

Merk op dat p_n dus graad $2n$ heeft! p_n kunnen we ook zo schrijven:

$$p_n(x) = \sum_{j=n+1}^{2n-1} (-1)^{j+1} \binom{n}{j - (n+1)} x^{j-1}$$

Dan geldt

$$c_j = -2^n + (-1)^j \sum_{k=n+1}^j (-1)^k (-1)^{k+1} \binom{n}{k - (n+1)}$$

Voor $\zeta(s)$ geldt dan dat

$$\zeta(s) = \frac{-1}{2^n(1 - s^{1-s})} \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{c_j}{(1+j)^s} + R_n(s)$$

De restterm is als volgt:

$$R_n(s) = \frac{1}{2^n(1 - s^{1-s})} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n |\log x|^{s-1}}{1+x} dx$$

Merk op dat deze integraal convergeert als $\Re s > -n$.

Als s een negatief geheel getal is, zien we dus dat de restterm gelijk is aan 0, omdat dan geldt

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = 0$$

.

7.4 Bernoulli-getallen

Om zowel het algoritme als de formule die we hebben gevonden in (6.3) te controleren, zijn we dit met een klein proefje nagegaan. De code is weer in de bijlage te vinden.

```
Bernoulli-getal 0 is gelijk aan 1
Bernoulli-getal 2 is gelijk aan 1/6
Bernoulli-getal 4 is gelijk aan -1/30
Bernoulli-getal 6 is gelijk aan 1/42
Bernoulli-getal 8 is gelijk aan -1/30
Bernoulli-getal 10 is gelijk aan 5/66
Bernoulli-getal 12 is gelijk aan -691/2730
Bernoulli-getal 14 is gelijk aan 7/6
Bernoulli-getal 16 is gelijk aan -3617/510
Bernoulli-getal 18 is gelijk aan 43867/798
Bernoulli-getal 20 is gelijk aan -290889128541811/549755813888
>> -290889128541811/549755813888+174611/330

ans =

-3.410605131648481e-13
```

Figuur 7.1: De eerste elf even Bernoulli-getallen

Vergelijk deze resultaten met tabel 6.1. Tot en met het achttiende Bernoulli-getal klopt het precies, daarna is de precisie van deze methode niet meer toereikend om Bernoulli-getallen uit te rekenen. Het twintigste berekende Bernoulli-getal wordt in de laatste regel met haar echte waarde vergeleken en een kleine fout moet worden geconstateerd. Bij hogere getallen wordt deze fout alleen maar groter. Dit komt door het verlies in precisie als we met hoge getallen op elkaar moeten delen als we binomiaalcoëfficiënten of faculteiten met hoge argumenten uitrekenen. We moeten concluderen dat dit algoritme geen efficiënte manier levert om Bernoulli-getallen uit te rekenen.

Hoofdstuk 8

Slot

In dit verslag hebben we gezien hoe Riemann de functie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

die alleen convergeert als $\Re s > 1$, uitbreidde naar het gehele complexe vlak behalve $s = 1$. Hieruit konden we afleiden dat er een aantal triviale nulpunten waren, veroorzaakt door de singulariteiten van de Γ -functie. Aan de hand hiervan stelde Riemann een wereldberoemde hypothese op, die na veel onderzoek nog steeds onopgelost is. Wel is al bekend dat alle nulpunten zich in de strip $0 < \Re s < 1$ bevinden en is ook een schatting te maken van het aantal nulpunten met begrensd imaginair deel. Ook hebben we gezien hoe de Riemann-functie zich verhoudt tot Hermitische matrix en Bernoulli-getallen. We hebben een voorbeeld bekeken van een algoritme dat ζ benadert en we hebben aan de hand hiervan een aantal Bernoulli-getallen berekend.

Bijlage A

Matlab Code - Algoritmen

A.1 Algoritme 1

```
function [y1] = algzeta(sigma,t,n)
%the first algorithm to calculate zeta-values

%if there is only 1 input, we check the critical line
%if there are two inputs, we interpret it as a complex number
if nargin == 1
    t = sigma;
    sigma = 1/2;
    n = 60;
end
if nargin == 2
    n = 60;
end

s = sigma + 1i * t;

d = zeros(n+1,1);

for k = 0:n
    sum = 0;
    for i = 0:k
        sum = sum + factorial(n+i-1)*4^i/(factorial(n-i)*factorial(2*i));
    end
    d(k+1)=n*sum;
end

secondsum = 0;
for k = 0:(n-1)
    secondsum = secondsum + (-1)^k*(d(k+1)-d(n+1))/((k+1)^s);
end

y1 = (-1)*secondsum/(d(n+1)*(1-2^(1-s)));
```

A.2 Algoritme 2

```

function [y1] = algzeta2(sigma,t,n)
%the second algorithm to calculate zeta-values

%if there is one input, we check the real line
%if there are two inputs, we interpret it as a complex number
if nargin == 1
    t = 0;
    n = 2;
end
if nargin == 2
    n = 2;
end
s = sigma + 1i * t;

a = zeros(2*n+1,1);
for i = n+1:2*n+1
    a(i) = (-1)^(i+1)*nchoosek(n,i-(n+1));
end

c = zeros(2*n+1,1);
for j = 1:2*n+1
    sum = 0;
    for k = 0:j-1
        sum = sum + (-1)^k*a(k+1);
    end
    c(j) = (-1)^(j-1) * (sum-2^n);
end

secondsum = 0;
for j = 1:2*n
    secondsum = secondsum + c(j)/j^s;
end

y1 = -secondsum/(2^n*(1-2^(1-s)));

```

A.3 Bernoulli numbers

```
clear;
clc;

%calculates the first 10 Bernoulli numbers using the first formula we found

B = zeros(11,1);
for k = 0:10
    B(k+1) = sym((algzeta(2*k,0)*2*factorial(2*k))/((-1)^(k+1)*(2*pi)^(2*k)));
    res = char(sym((algzeta(2*k,0)*2*factorial(2*k))/((-1)^(k+1)*(2*pi)^(2*k))));
    string = 'Bernoulli-getal %d is gelijk aan ';
    str = sprintf(string,2*k);
    disp([str,res])
end
```


Bijlage B

Matlab Code - Random matrices

B.1 Matrix Creator

```
function [A] = GUE(n,sigmasq)
%creates an NxN matrix according to the Hermitian GUE distribution

A = zeros(n);

for i = 1:n
    A(i,i) = normrnd(0,sigmasq);
end

for i = 1:n
    for j = (i+1):n
        Re = normrnd(0,sigmasq/2);
        Im = normrnd(0,sigmasq/2);
        A(i,j) = Re + 1i*Im;
        A(j,i) = Re - 1i*Im;
    end
end
end
```

B.2 Pair Correlation GUE

```

n=3000;

%creates an nxn-GUE matrix and calculates its eigenvalues (sorted)
X = GUE(n,1);
eigenvalues = eig(X);

%!! OPTIONAL: saves these eigenvalues or reads them from a file !!
%dlmwrite('eigenvalues3000.txt',eigenvalues,'\t');

%eigenvalues = textread('eigenvalues3000.txt');
%n = length(eigenvalues);

%calculates the difference between subsequent eigenvalues
diff=zeros(n-1,1);
for i = 1:n-1
    diff(i) = eigenvalues(i+1)-eigenvalues(i);
end

%normalises the eigenvalues so the mean difference is 1
eigenvalues = eigenvalues/mean(diff);

%calculates the difference between subsequent normalised eigenvalues and
%sorts them
for i = 1:n-1
    diff(i) = eigenvalues(i+1)-eigenvalues(i);
end
mean(diff)
A=sort(diff);

alength = length(A);
T = A(alength);

%calculates the pair correlation
itvsize = 0.05;
itvvector = 0:itvsize:3;
numberOfIntervals = length(itvvector)-1;
counter = zeros(numberOfIntervals,1);

for x = 1:numberOfIntervals
    a = itvvector(x);
    b = itvvector(x+1);
    for i = 2:alength-1
        currentSum = A(i);
        j=i+1;
        while(currentSum < a && j < alength)
            currentSum = currentSum + A(j);
            j = j+1;
        end
        while(currentSum < b && j < alength)
            currentSum = currentSum + A(j);
            counter(x) = counter(x)+1;
            j = j+1;
        end
    end
end

%plots the pair correlation

```

```
counter = numberOfIntervals/3*counter/length;  
plot(itvvector(1:60)+itvsize/2, counter, 'r*')  
hold on  
pc = 1.-(sin(pi.*itvvector)./(pi.*itvvector)).^2;  
plot(itvvector, pc)
```

B.3 Nearest Neighbour Distribution GUE

```

clear;
clc;
n=9000;
%creates an nxn-GUE matrix and calculates its eigenvalues (sorted)
X = GUE(n,1);
eigenvalues = eig(X);

%!! OPTIONAL: saves these eigenvalues or reads them from a file !!
%dlmwrite('eigenvalues9000.txt',eigenvalues,'\t');
%eigenvalues = textread('eigenvalues9000.txt');

%calculates the difference between subsequent eigenvalues
diff=zeros(n-1,1);
for i = 1:n-1
    diff(i) = eigenvalues(i+1)-eigenvalues(i);
end

%normalises the eigenvalues so the mean difference is 1
eigenvalues = eigenvalues/mean(diff);

%calculates the difference between subsequent normalised eigenvalues and
%sorts them
for i = 1:n-1
    diff(i) = eigenvalues(i+1)-eigenvalues(i);
end
mean(diff)
A=sort(diff);

alength = length(A);
T = A(alength);

%calculates the nearest neighbour spacing
itvsize = 0.05;
itvvector = 0:itvsize:3;
numberOfIntervals = length(itvvector)
counter = zeros(numberOfIntervals,1);
for i = 1:alength
    for c = 1:numberOfIntervals-1
        if (A(i) > itvvector(c) && A(i) <= itvvector(c+1))
            counter(c) = counter(c)+1;
        end
    end
end

%plots the nearest neighbour spacing
counter = counter*numberOfIntervals/(3*alength);
plot(itvvector+itvsize/2,counter,'r*')
hold on
nns = 32/(pi^2).*itvvector.^2.*exp(-4.*itvvector.^2/pi);
plot(itvvector,nns)

```


B.4 Pair Correlation ζ

```

clear;
clc;

%retrieves the zeta zeros from file
%source: (http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko//zeta_tables/index.html)
%choose on of the following 3:
%A = textread('first105zeros.txt');
%A = textread('104zerosfrom1012.txt')+267653395647;
A = textread('first2106zeros.txt');

alength = length(A)
T = A(alength)

%normalises the zeros
for i = 1:alength-1
    B(i) = (A(i+1)-A(i))*log(A(i)/(2*pi))/(2*pi);
end

%calculates the pair correlation
itvsize = 0.05;
itvvector = 0:itvsize:3;
numberOfIntervals = length(itvvector)-1;
counter = zeros(numberOfIntervals,1);

for x = 1:numberOfIntervals
    a = itvvector(x);
    b = itvvector(x+1);
    for i = 2:alength-1
        currentSum = B(i);
        j=i+1;
        while(currentSum < a && j < alength)
            currentSum = currentSum + B(j);
            j = j+1;
        end
        while(currentSum < b && j < alength)
            currentSum = currentSum + B(j);
            counter(x) = counter(x)+1;
            j = j+1;
        end
    end
end

%plots the pair correlation
counter = numberOfIntervals/3*counter/alength;
plot(itvvector(1:60)+itvsize/2,counter,'r*')
hold on
pc = 1.-(sin(pi.*itvvector)./(pi.*itvvector)).^2;
plot(itvvector,pc)

```

B.5 Nearest Neighbour Distribution ζ

```

clear;
clc;

%retrieves the zeta zeros from file
%source: (http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko//zeta_tables/index.html)
%choose on of the following 3:
%A = textread('first105zeros.txt');
%A = textread('104zerosfrom1012.txt')+267653395647
A = textread('first2106zeros.txt');

%normalises the zeros
for i = 1:length(A)-1
    B(i) = (A(i+1)-A(i))*log(A(i)/(2*pi))/(2*pi);
end
bsize=length(B);

%calculates the nearest neighbour spacing
itvsize = 0.05;
itvvector = 0:itvsize:3;
numberOfIntervals = length(itvvector)
counter = zeros(numberOfIntervals,1);
for i = 1:bsize
    for c = 1:numberOfIntervals-1
        if (B(i) > itvvector(c) && B(i) <= itvvector(c+1))
            counter(c) = counter(c)+1;
        end
    end
end

%plots the nearest neighbour distribution
counter = counter*numberOfIntervals/(3*bsize);
plot(itvvector+itvsize/2,counter,'r*')
hold on
nns = 32/(pi^2).*itvvector.^2.*exp(-4.*itvvector.^2/pi);
plot(itvvector,nns)

```

Bibliografie

- [1] Borwein, P., Choi, S., Rooney, B., Weirathmueller, A., *The Riemann Hypothesis*. Springer, 2008.
- [2] Mehta, M.L., *Random Matrices*. Academic Press, third edition, 2004.
- [3] Titchmarsh, E.C., *The theory of the Riemann Zeta-function*. Oxford University Press, second edition, 1986.
- [4] Montgomery, H.L., *The pair correlation of zeros of the zeta function*. Proceedings of symposia in pure mathematics, Volume XXIV, American Mathematical Society, 1973, pp. 181-193.
- [5] Borwein, P., *An efficient algorithm for the Riemann zeta function*. Constructive, Experimental, and Nonlinear Analysis, Volume 27, American Mathematical Society, 2000, pp. 29-34.
- [6] Jafarizadeha, M.A., Fouladic, N., Sabric, H., Malekic, B.R., *Investigation of Level Statistics by Generalized Brody Distribution and Maximum Likelihood Estimation Method*. arXiv:1210.4751v1 [nucl-th], 2012.
- [7] Dwilewicz, R.J., Mináč, J., *Values of the Riemann zeta function at integers*. MATerials MATemàtics, 2009.
- [8] Ivic, A., *The Riemann Zeta-function: Theory and Applications*. Courier Dover Publications, 2003.
- [9] Ram Murty, M., Reece, M., *A simple derivation of $\zeta(1 - K) = -B_K/K$* . Functiones et Approximatio, Volume XXVIII, 2000, pp. 141-154.
- [10] *Andrew Odlyzko: Tables of zeros of the Riemann zeta function*, http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko//zeta_tables/index.html, als laatst geraadpleegd op 10 augustus 2014.
- [11] Keating, J.P., Snaith, N.C., *Random Matrix Theory and $\zeta(1/2 + it)$* . Communications in Mathematical Physics, Springer, 2000.